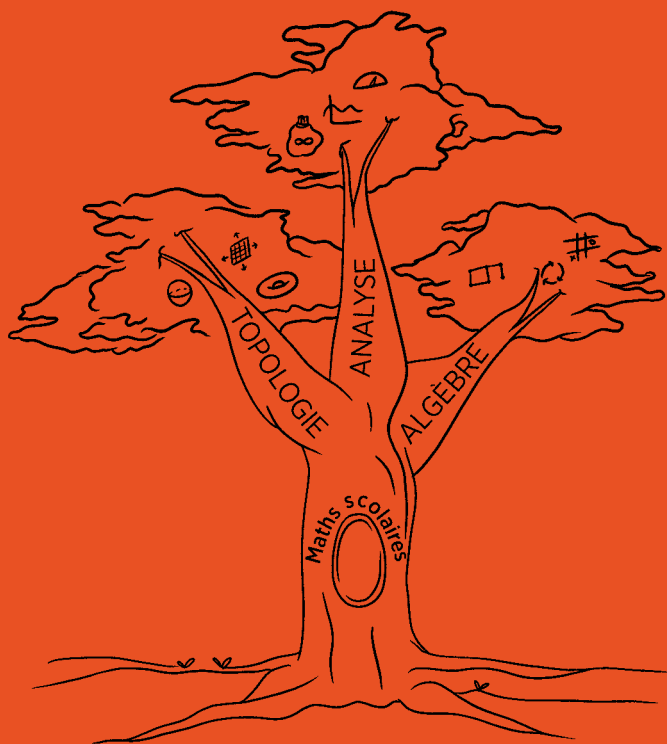


LA MAGIE  
DES



MILO BECKMAN

# MATHS SANS NOMBRES



« Le jeune prodige  
qui révolutionne  
les mathématiques »

*THE TIMES*

ALISIO  
SCIENCES

# LES SEULS NOMBRES QUE VOUS TROUVEREZ DANS CE LIVRE DE MATHÉMATIQUES... ...SONT LES NUMÉROS DE PAGES !

Oubliez vos tables de multiplication, Pi ou autres équations et découvrez une nouvelle manière créative et ludique de faire et de penser les mathématiques, sans le moindre calcul. Richement illustré d'une centaine de dessins qui permettent de visualiser clairement les concepts les plus complexes, le livre de Milo Beckman est un voyage fascinant au pays des trois principaux fondements des mathématiques : la topologie, l'analyse et l'algèbre.

Sous la forme d'énigmes, de questions-réponses, l'auteur nous plonge dans la tête d'un mathématicien et nous fait réfléchir aux formes et aux dimensions, à l'infini et à l'infinitésimal, aux symétries, aux preuves et à la manière dont ces concepts s'imbriquent et façonnent par des liens inattendus le monde qui nous entoure.

**« Découvrez Milo Beckman, le petit génie qui rend les maths supercool... Un livre remarquable qui révolutionne tout ce qu'on pensait savoir (et craindre) des mathématiques. »**

*The Times*

**« Une brillante introductions aux pures mathématiques.  
Un plaisir de lecture de bout en bout »**

Brian Clegg, auteur du best-seller *3 minutes pour comprendre les 50 notions fondamentales de Physique*.

**MILO BECKMAN est un passionné et un génie des mathématiques. Il intègre Harvard à tout juste 15 ans et ses travaux de recherche ont été relayés par la presse internationale. Après avoir travaillé dans le monde de la tech, il enseigne maintenant les mathématiques à New York, en Chine et au Brésil.**

ISBN : 978-2-37935-260-7



**18 €**  
PRIX TTC  
FRANCE

Rayon : Sciences

ALISIO  
SCIENCES



**ALISIO**

*L'éditeur des voix qui inspirent*

Suivez notre actualité sur [www.alisio.fr](http://www.alisio.fr)  
et sur les réseaux sociaux LinkedIn, Instagram,  
Facebook et Twitter !

**Alisio s'engage pour une fabrication éco-responsable !**

Notre mission : vous inspirer. Et comment le faire sans  
participer à la construction du meilleur des futurs possible ?

C'est pourquoi nos ouvrages sont imprimés sur du papier  
issu de forêts gérées durablement.

Titre de l'édition originale : *Math without numbers*

© 2021 by Milo Beckman

Illustrations de M Erazo

Photographie p. 181 © Michael Tuchbaud, university of Colorado  
Boulder

Tous droits réservés, y compris le droit de reproduction de tout ou  
une partie de l'ouvrage, sous quelque forme que ce soit. Cette édition  
est publiée avec l'accord de Dutton, une marque de Penguin Random  
House LLC.

Traduit de l'anglais par Laurent Bury

Suivi éditorial : Colombe Camus

Relecture-correction : Emma Pavan

Maquette : Ma petite FaB - Laurent Grolleau

Design de couverture : Frédéric Bélonie

© 2022 Alisio,

une marque des éditions Leduc

10, place des Cinq-Martyrs-du-Lycée- Buffon

75015 Paris – France

ISBN : 978-2-37935-260-7

MILO BECKMAN

LA MAGIE  
DES MATHS  
SANS  
NOMBRES

ALISIO  
SCIENCES



Pour Eriq, qui m'a poussé à écrire ce livre

Avec mes remerciements à Taylor, qui a vérifié les calculs,  
à Portia pour le dialogue, et à M qui a animé le tout









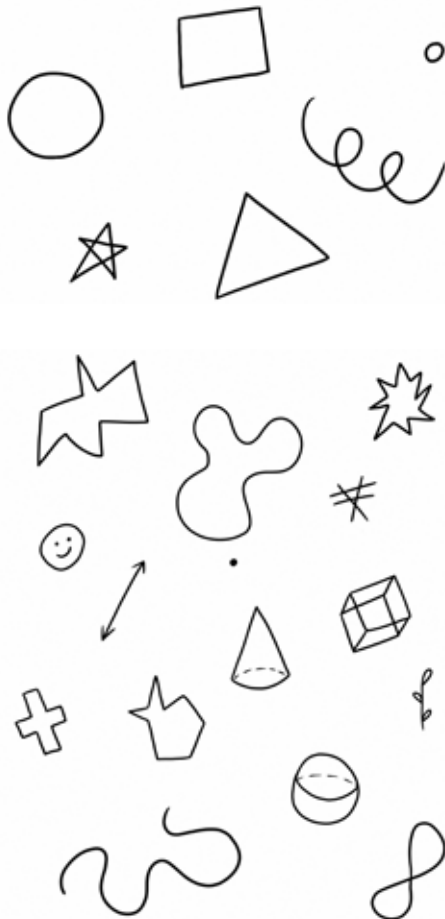






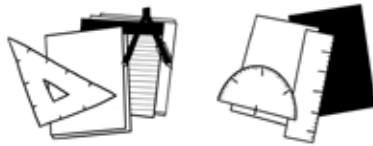
La question est très simple, mais il n'est pas facile d'y répondre. Une version plus précise et plus limitée de cette question, appelée conjecture de Poincaré, existe depuis plus d'un siècle, et personne n'a encore pu résoudre l'énigme. Des tas de gens ont essayé, et un mathématicien professionnel a récemment remporté un million de dollars pour avoir résolu une grosse partie du problème. Mais il reste beaucoup de catégories de formes qui n'ont pas été comptées, donc nous ne savons toujours pas, en tant que communauté globale, combien il existe de formes.

Essayons de répondre à la question. Combien existe-t-il de formes ? Faute de mieux, pour commencer, il me paraît utile de dessiner des formes pour voir où cela nous mène.



Apparemment, la réponse à notre question va dépendre de la manière dont nous divisons les choses en différentes catégories de formes. Un grand cercle est-il la même forme qu'un petit cercle ? Faut-il créer une grande catégorie « gribouillis », ou faut-il la subdiviser en différents types de gribouillis ? Il nous faut une règle générale pour trancher des cas de ce genre, pour que la question « Combien de formes ? » ne se réduise pas à un jugement au cas par cas.

On peut adopter plusieurs règles, grâce auxquelles on pourrait très bien décider si deux formes sont identiques ou différentes. Si vous êtes menuisier ou ingénieur, il vous faut une règle très stricte et très précise, qui ne range deux formes dans la même catégorie que si leurs longueurs, leurs angles et leurs courbes correspondent parfaitement. Cette règle conduit à un type de maths appelé géométrie, où les formes sont rigides et exactes, où l'on trace des perpendiculaires et où l'on calcule des surfaces.



Nous n'avons pas besoin d'une règle aussi stricte. Nous essayons de trouver toutes les formes possibles, et nous n'avons pas le temps de trier des milliers de sortes de gribouillis. Il nous faut une règle assez large quand il s'agit de deux choses de la même forme, pour décomposer le monde des formes en un nombre gérable de grandes catégories.

### NOUVELLE RÈGLE

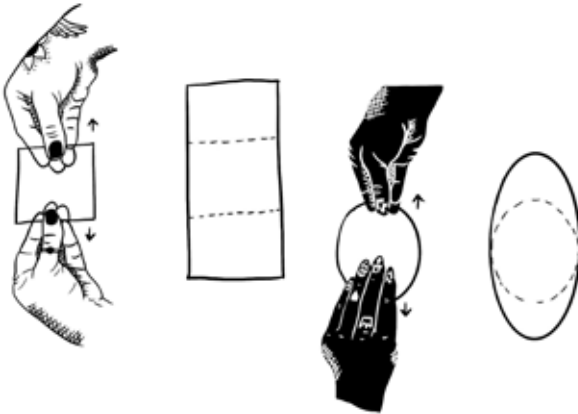
Deux formes sont identiques si l'on peut transformer l'une en l'autre en tirant et en appuyant dessus, sans rien arracher ni recoller.

Cette règle est l'idée centrale de la topologie, qui est un peu une version cool de la géométrie. En topologie, les formes sont faites d'une

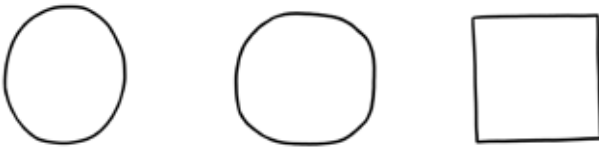
matière mince et élastique à l'infini, qu'on peut tordre dans tous les sens comme un chewing-gum. En topologie, la taille d'une forme est sans importance.



Donc, un carré est la même chose qu'un rectangle et un cercle est la même chose qu'un ovale.



C'est là que ça devient bizarre. Si vous réfléchissez en utilisant la règle du « tirer et appuyer », on peut considérer qu'un cercle et un carré ont la même forme !



Avant d'aller dire à vos amis que vous lisez un livre de maths qui déclare qu'un carré est un cercle, n'oubliez pas que c'est une question de contexte. Un carré est un cercle *en topologie*. Un carré n'est certainement pas un cercle en art ou en architecture, ni dans la

conversation courante, ni même en géométrie, et si vous avez un vélo à roues carrées vous n'irez pas très loin.

Mais pour le moment, nous faisons de la topologie, et quand nous faisons de la topologie peu nous importent des détails frivoles comme les coins pointus qu'on peut arrondir. Passons outre les différences superficielles, les choses comme les longueurs et les angles, les côtés droits par opposition aux côtés arrondis ou bicornus. Focalisons-nous sur la *forme* essentielle sous-jacente : les caractéristiques fondamentales qui font qu'une forme est ce qu'elle est. Quand un topologiste regarde un carré ou un cercle, tout ce qu'il voit, c'est une boucle fermée. Le reste dépend simplement de la façon dont vous tordez la forme en question.

C'est comme si l'on demandait « Quelle est la forme d'un collier ? ». C'est un carré si vous le tenez de telle façon, c'est un cercle si vous le tenez d'une autre façon. Mais vous aurez beau le tortiller dans tous les sens, il conserve sa *forme* intrinsèque, fondamentale, qui ne change pas, qu'il s'agisse d'un carré, d'un cercle, d'un octogone, d'un cœur, d'un croissant, d'une tache ou d'un heptahectahexadécagone.



Puisque cette forme peut prendre bien des aspects, il n'est pas tout à fait juste de l'appeler cercle ou carré. On l'appelle parfois cercle



malgré tout, mais le nom officiel de cette forme en topologie est «  $S^1$  ».  $S^1$  est la forme d'un collier, d'un bracelet ou d'un élastique, d'un circuit, des douves d'un château ou des frontières d'un pays (dépourvu d'enclaves externes comme l'Alaska), des lettres O et D majuscule, ou de toute boucle fermée quelle que soit sa forme.

Existe-t-il d'autres formes ? Il serait dommage que notre règle du « tirer et appuyer » réduise toute la diversité des formes à une seule grande catégorie. Bonne nouvelle : ce n'est pas le cas. Il existe encore des formes qui se différencient du cercle.

Un trait, par exemple :



On peut tordre une ligne jusqu'à ce qu'elle devienne presque un cercle, mais pour finir le travail, il faudrait faire se rejoindre les deux bouts, et c'est interdit. Vous aurez beau manipuler un trait, il aura toujours deux extrémités, où la forme s'arrête. Impossible de se débarrasser de ces points-là. Vous pouvez les rapprocher ou les éloigner, mais ces deux bouts sont une caractéristique immuable de la forme en question.

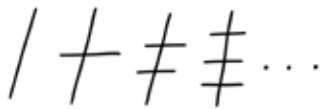
Pour une raison semblable, le chiffre 8 est aussi une autre forme. Il n'y a pas d'extrémités, mais il y a un point spécial au milieu où les lignes se croisent, d'où partent quatre bras au lieu des deux habituels à chacun des autres points. Vous aurez beau l'étirer ou le compresser, vous ne pourrez pas éliminer ce point de croisement.



Si l'on y réfléchit, il y a là assez d'informations pour répondre à la question initiale : « Combien existe-t-il de formes ? » La réponse est : une infinité. Et je vais vous le prouver.

### PREUVE

Regardez cette famille de formes. Vous inventez une nouvelle forme chaque fois que vous ajoutez une barre à la précédente.



Chaque nouvelle forme a davantage de points de croisement et d'extrémités que toutes les précédentes. Donc chacune doit vraiment être une forme nouvelle et différente. Continuez sans jamais vous arrêter, et vous obtiendrez une famille infinie de formes différentes, donc il existe une infinité de formes.

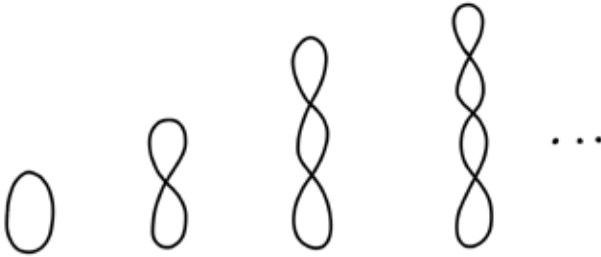
**CQFD**

Convaincus ? Il vous suffit de trouver n'importe quelle famille infinie de formes différentes, où on voit tout de suite comment continuer à fabriquer de nouvelles formes différentes.

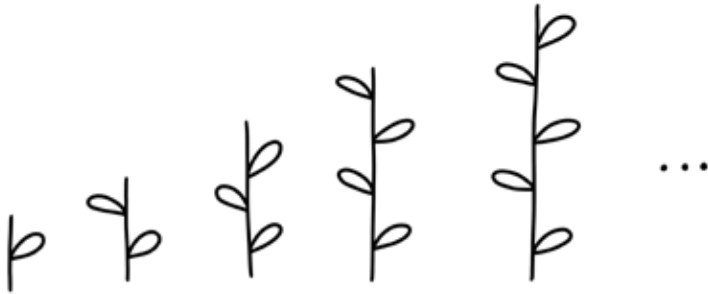
Celle-ci aurait très bien fait l'affaire :



Ou celle-ci :



Celle-ci marche aussi :



Quelle que soit la façon de le prouver, l'argument fondamental est le même. Vous voulez montrer qu'il existe une quantité infinie de quelque chose, donc vous décrivez un processus systématique qui ne cesse de produire de nouveaux exemples différents de cette chose. C'est ce qu'on appelle l'argument de la « famille infinie », qui est un outil assez courant en maths lorsqu'on veut montrer qu'il existe une infinité de quelque chose. Je le trouve convaincant – je ne vois pas trop comment on pourrait s'y opposer. Il doit bien exister une infinité de quelque chose si l'on peut continuer à en fabriquer sans jamais s'arrêter.

Et je ne suis pas le seul : la communauté mathématique dans son ensemble considère les arguments de type « famille infinie » comme une preuve mathématique valide. Il existe un tas de techniques similaires, où le même genre d'argument peut être utilisé dans des

contextes variés pour prouver des choses différentes. Les gens qui font beaucoup de maths finissent par remarquer que certains types de raisonnement reviennent sans cesse. Nous sommes (presque) tous d'accord pour considérer comme légitimes certains types de preuves.

Si vous acceptez cette preuve, nous avons répondu à la question « Combien existe-t-il de formes ? ». La réponse est : une infinité. Ce n'est pas une question particulièrement intéressante, mais c'est la réponse qu'on obtient. Une fois la question posée et les règles fixées, la réponse s'impose. Il suffit de la trouver.

La première question qui vous vient à l'esprit ne débouche pas toujours sur la réponse la plus intéressante ou la plus éclairante. Dans ces cas-là, on peut laisser tomber et penser à autre chose, ou poser une meilleure question.





# VARIÉTÉS

Comme il y a trop de formes à envisager, les topologistes se concentrent sur les plus importantes. *Les variétés topologiques*. Ça paraît complexe, mais ça ne l'est pas vraiment – on peut même vivre sur une variété topologique. Les cercles, les lignes, les plans, les sphères : les variétés sont les formes lisses, simples, uniformes qui semblent toujours jouer le rôle principal quand nous travaillons avec des espaces physiques en maths et en sciences.

Elles sont tellement simples que l'on s'attendrait à ce qu'elles aient déjà toutes été découvertes. Mais non. Ce sujet embarrasse tellement les topologistes qu'ils ont offert une récompense d'un million de dollars pour encourager les gens à l'étudier. C'est la plus grande question sans réponse de la topologie, qui amuse et contrarie les experts de ce domaine depuis plus d'un siècle :

**Combien existe-t-il de variétés ?**

Ou, un peu plus précisément :

**Quelles sont toutes les variétés ?**

Le but n'est pas littéralement de les compter toutes, mais de les découvrir toutes, de les nommer et de les classer en différentes espèces. D'établir un petit guide de toutes les variétés possibles.

Donc qu'est-ce exactement qu'une variété ? La règle est assez stricte, et la plupart des formes ne réussissent pas le test.

**NOUVELLE RÈGLE**

Une forme est appelée « variété » si elle n'a pas de point spécial : ni extrémités, ni point de croisement, ni point d'embranchement. Elle doit être la même partout.

Cela exclut immédiatement toutes ces familles infinies du chapitre précédent. Tout ce qui a des pointillés, des astérisques, etc., ne compte pas comme variété. Cela signifie que la question « combien » a peut-être déjà sa réponse : il pourrait exister un nombre exact et fini de variétés. Nous verrons bien.

Cette définition ne se limite pas aux formes plates, de style fil de fer, avec lesquelles nous avons travaillé. On peut avoir des variétés dont le matériau ressemble à une feuille ou à une pâte. L'univers dans lequel nous vivons est probablement une variété tridimensionnelle, sauf si vous pensez qu'il existe une limite physique où il s'arrête, ou qu'il se replie sur lui-même.

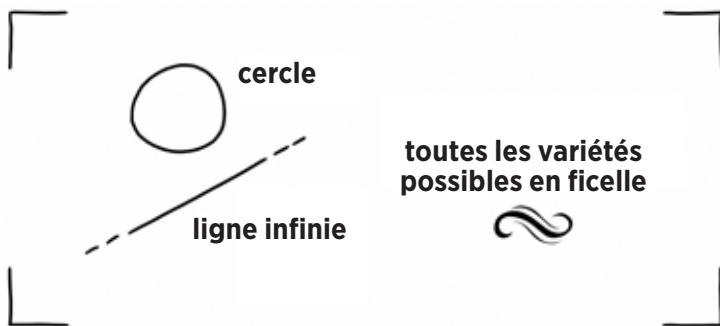
Mais restons-en pour le moment aux formes « fil de fer », comme l'on peut en fabriquer avec de la ficelle ou des trombones. En topologie, ces formes sont dites unidimensionnelles, même si elles sont dessinées sur une page bidimensionnelle. Ce qui importe, c'est le matériau de la forme.

Alors, combien de variétés peut-on créer avec de la ficelle ? Il n'y a pas tant d'options que ça. La plupart des formes en ficelle ont des points spéciaux.



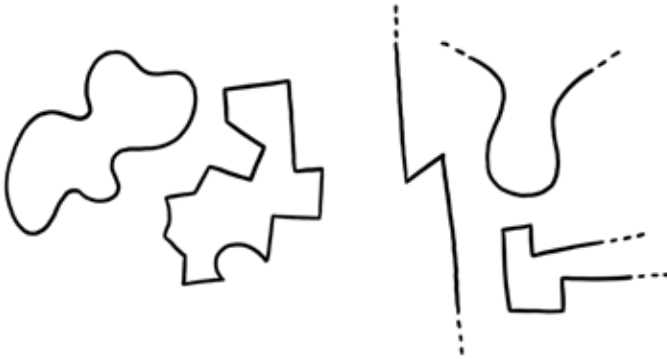
Les zigzags, les courbes et les angles, c'est très bien, puisqu'on peut les faire disparaître en les lissant. Le vrai problème, ce sont les extrémités. Comment les éliminer ?

Il n'y a que deux variétés en ficelle. Si vous ne les connaissez pas, prenez une seconde pour regarder dans le vide et y réfléchir avant de tourner la page.





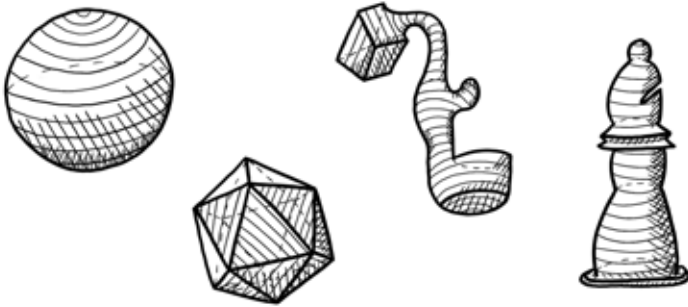
Le cercle (alias  $S^1$ ) et la droite infinie (appelée  $R^1$ ) sont les seules variétés de la première dimension. Pour éviter les points d'extrémité, il faut soit toujours revenir à son point de départ, soit continuer sans jamais s'arrêter. Et n'oubliez pas : en topologie, toutes les formes peuvent être étirées, donc cela vaut aussi pour toutes les boucles fermées et pour toutes les formes sans fin. Ça ne doit pas être littéralement un cercle ou une droite.



Voilà pour la dimension 1. Pas mal ! Comme vous le voyez, le champ d'investigation s'est beaucoup rétréci. La question initiale – « Combien existe-t-il de formes ? » – était trop large, mais celle-ci paraît gérable, du moins jusqu'ici. Êtes-vous prêt à passer à la dimension suivante ?

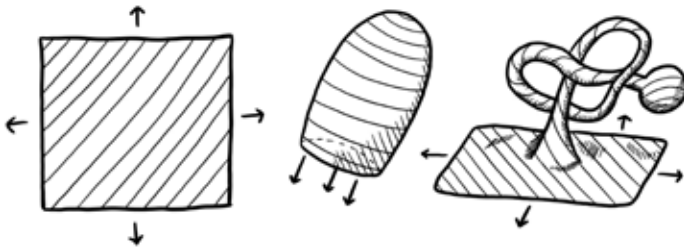
En dimension 2, nous avons affaire à des variétés du type feuille. Rappelez-vous, c'est le matériau qui compte ! La plupart de ces formes vous semblent tridimensionnelles, mais elles sont faites d'un matériau bidimensionnel, et c'est ça, qui compte.

Donc : Quelles variétés peut-on fabriquer à partir de feuilles ? On cherche quelque chose qui ressemble à une feuille de manière continue, sans bord où la feuille s'arrête brusquement. J'ai dit qu'on vivait sur une variété, vous vous rappelez ? La surface de la Terre est une sphère, c'est-à-dire une variété bidimensionnelle.



En tirant et en appuyant, la forme « sphère » inclut n'importe quelle surface fermée : cube, cône, cylindre... Mais attention à la terminologie ! En maths, « sphère » ne désigne qu'une forme creuse, alors que « boule » est une forme pleine. Une boule est tridimensionnelle (faite de pâte), donc on oublie pour le moment.

Cette sphère générale est appelée  $S^2$ , logique puisque c'est un peu la version supérieure du cercle,  $S^1$ . On peut utiliser la même stratégie pour découvrir notre prochaine variété. Quel est l'équivalent de la ligne infinie, avec une dimension de plus ? Le plan infini.

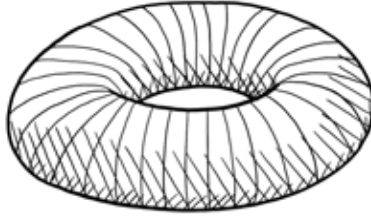


Cette variété s'appelle  $R^2$ , et elle inclut toute surface infinie qui divise l'espace en deux régions infinies.

Vous savez qu'il y a des gens pour qui la Terre est plate ? D'un point de vue topologique, ce n'est pas absurde. Une variété n'a pas de points spéciaux, donc tous les points sont identiques entre eux, si l'on prend l'option Street View. Il peut y avoir une incurvation, mais si vous êtes assez minuscule vous ne la remarquerez pas. Si vous viviez

sur une variété-feuille, vous auriez (localement) l'impression de vivre sur une surface plate.

Et il y a bien d'autres variétés-feuilles que ces deux-là. Plus de dimensions, cela veut dire plus de liberté de mouvement. Avec un matériau bidimensionnel, on peut construire de nouvelles variétés qui n'ont pas d'équivalent en fil de fer.



Un donut est une variété. On voit que c'est une nouvelle variété à cause du trou au milieu – vous aurez beau le tordre dans tous les sens, vous ne pourrez pas éliminer ce trou. Mais c'est un trou très bizarre : il n'a pas de bords. Lorsqu'on découpe un trou dans une feuille de papier, ça laisse un bord de points spéciaux. Le trou du donut est plus subtil. On ne le voit que de l'extérieur. Si vous habitez à la surface d'une planète en forme de donut, vous ne remarqueriez jamais qu'il y a un trou. Localement, vous auriez exactement la même impression que si vous habitez une sphère ou une surface plate.

